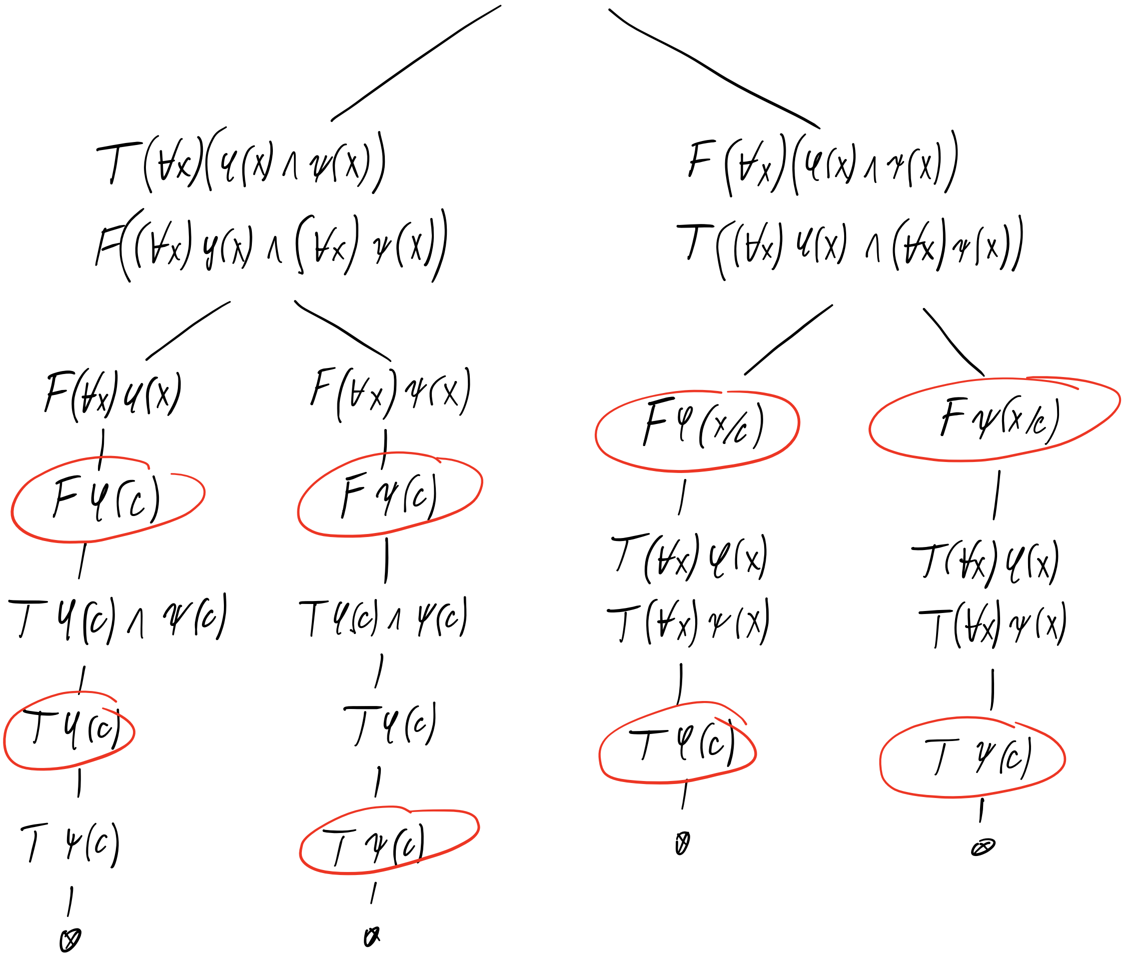
Tablo-metoda

Tablo-důkaz: sporné tablo s F kořenem (nebyl nalezen protipříklad)

Tablo-zamítnutí: sporné tablo s T kořenem

Formule budou sentence --> uzavřené formule bez volných proměnných
↳ pokud není, udělej uzávěr

$$F(\forall x)(\varphi(x) \land \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \land (\forall x)\psi(x))$$



$T \vdash f$

Prenexní tvar

- všechny kvantifikátory musí být před formulí
  ↳ shody se tedy musí ekvivalentně přejmenovat

Musí být zachováno pořadí kvantifikátorů daných formulí: $(\forall x)((\exists y)\varphi \lor \psi) \sim (\forall x)(\exists y)(\varphi \lor \psi)$

$(\exists y)(\forall x)(\varphi \lor \psi)$ nelze!

Základní pravidla pro vytýkání jsou:

$$\neg(Qx)\varphi \sim (\bar{Q}x)\neg\varphi$$
$$((Qx)\varphi \land \psi) \sim (Qx)(\varphi \land \psi)$$
$$((Qx)\varphi \lor \psi) \sim (Qx)(\varphi \lor \psi)$$
$$((Qx)\varphi \to \psi) \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi)$$
$$(\varphi \to (Qx)\psi) \sim (Qx)(\varphi \to \psi)$$

$$(\forall y)((\exists x) P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x) R(x,y) \vee Q(x,y))$$

$$(\forall y)((\exists x') P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y')((\forall x'') R(x'',y') \vee Q(x,y'))$$

$$(\forall y)(\forall x')(P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y')(\forall x'')(R(x'',y') \vee Q(x,y'))$$

→ generální uzávěr

$$\forall x \forall z\, (\exists y')(\forall y)(\forall x')(\forall x'')((P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (R(x'',y') \vee Q(x,y')))$$

Skolemizace

Převedení všech existenčních kvantifikátorů na funkci předchozích (myšleno v prenexním tvaru) všeobecných kvantifikátorů.

Pozor, platí to i na kvantifikátory generálního uzávěru

$$y' = f(x,z) \;\Big|\; \forall x \forall z \forall y \forall x' \forall x'' ((P(x',y) \to Q(y,z)) \wedge (R(x'',f(x,z)) \vee Q(x,f(x,z)))).$$

Rezoluční metoda

Vyžaduje skolemizaci (tedy i prenexní tvar), rezoluční rozhodnutí formule φ je $\vdash_R \neg\varphi$.

$$\varphi:\ (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \to ((\exists y) P(x,y) \wedge (\exists y) R(y))$$

$$\neg\varphi:\ (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \wedge \neg((\exists y) P(x,y) \wedge (\exists y) R(y))$$

$$(\exists y')(P(x,y') \wedge R(y')) \wedge ((\forall y'') \neg P(x,y'') \vee (\forall y''') \neg R(y'''))$$

$$(\forall x)(\exists y')(\forall y'')(\forall y''')\ P(x,y') \wedge R(y') \wedge (\neg P(x,y'') \vee \neg R(y'''))$$ – prenexní tvar

$$y' = f(x) \;\Big|\; \forall x \forall y'' \forall y'''\ P(x,f(x)) \wedge R(f(x)) \wedge (\neg P(x,y'') \vee \neg R(y''))$$ → skolemova varianta

$$\{P(x,f(x))\},\ \{R(f(x))\},\ \{\neg P(x,y''), \neg R(y'')\}$$

$$\{\neg P(x,f(x))\} \quad - \{y''/f(x)\}$$

$$\square$$

Dokázáno!

$$((Qx)\varphi \to \psi) \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi)$$

$$\neg(Qx)\varphi \vee \psi \sim (\bar{Q}x)\neg\varphi \vee \underline{\psi} \sim (\bar{Q}x)(\varphi \to \psi)$$

$F\,(\exists x)(P(x) \to R(x))$

$T\,(\exists x)(P(x) \to Q(x))$

$T\,(\exists x)(\neg R(x) \to \neg Q(x))$

Left branch:

$F\,P(c)$

$F\,(\exists x)(P(x) \to R(x))$

$T\,P(c)$

$F\,R(c)$

$\otimes$

Right branch:

$T\,Q(c)$

Left sub-branch:

$F\,\neg R(d)$

$T\,R(d)$

$F\,(\exists x)(P(x) \to R(x))$

$F\,(P(d) \to R(d))$

$T\,P(d)$

$F\,R(d)$

$\otimes$

Right sub-branch:

$T\,\neg Q(d)$

$F\,Q(d)$

$F\,(\exists x)(P(x) \to R(x))$

$F\,(P(d) \to R(d))$

$T\,P(d)$

$F\,R(d)$

Tato větev neobsahuje spor,
čili se nejedná o tablo-důkaz

$F\big((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))\big)$

- $T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
  $F((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
  - $F(\forall x)\varphi(x)$
    $F\varphi(x/c)$
    $T\varphi(x/c) \wedge \psi(x/c)$
    $T\varphi(c)$
    $T\psi(c)$
    $\otimes$
  - $F(\forall x)\psi(x)$
    $F\psi(x/c)$
    $T\varphi(x/c) \wedge \psi(x/c)$
    $T\varphi(c)$
    $T\psi(c)$
    $\otimes$
- $F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
  $T((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
  $F\varphi(x/c) \wedge \psi(x/c)$
  - $F\varphi(c)$
    $T((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
    $T(\forall x)\varphi(x)$
    $T(\forall x)\psi(x)$
    $T\varphi(c)$
    $\otimes$
  - $F\psi(c)$
    $T((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
    $T(\forall x)\varphi(x)$
    $T(\forall x)\psi(x)$
    $T\psi(c)$
    $\otimes$

Rezoluce:

Pokud mám teorii a chci ověřit $T \models \varphi$,
tak musím přidat $\neg\varphi$ do teorie. Pokud to tablem zamítnu,
tak neexistuje žádný model, ve kterém by $\neg\varphi$ platilo.
Tedy pak v T platí φ.

Tzn. jenom u formule k ověření přidávám negaci, u ostatních to nechám stejně.

$T = \{\neg P(x,x),\ P(x,y) \to P(y,x),\ P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)\}$

$T \models (\exists x)\, \neg P(x, f(x))$ $\qquad \neg(\exists x)\, \neg P(x, f(x)) \sim \cancel{\neg\neg}(\forall x)\, P(x, f(x))$

$\{P(x''', f(x'''))\},\ \{\neg P(x', y'),\ P(y', x')\},\ \{\neg P(x'', y''),\ \neg P(y'', z),\ P(x'', z)\},\ \{P(x''', f(x'''))\}$

$x'''/x',\ y'/f(x''')$ $\qquad\qquad$ $x'''/x'',\ y''/f(x''')$

$\{P(f(x'), x')\}$ $\qquad\qquad$ $\{\neg P(f(x''), z),\ P(x'', z)\}$

$z/x'',\ x'/x''$

$\{P(x'', x'')\}$ $\qquad\qquad$ $\{\neg P(x,x)\}$

x''/x

$\square$ Rezoluční zamítnutí!

$\{P(x),\ Q(x,y),\ Q(x, f(z))\},\ \{\neg P(u),\ \neg Q(f(u), u)\}$

$$\varphi: (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \rightarrow ((\exists y)P(x,y) \wedge (\exists y)R(y))$$

$$\neg\varphi: (\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \wedge (\neg(\exists y')P(x,y') \vee \neg(\exists y'')R y''))$$

$$(\exists y)(P(x,y) \wedge R(y)) \wedge ((\forall y')\neg P(x,y') \vee (\forall y'')\neg R(y''))$$

$$\forall x \exists y \forall y' \forall y'' (P(x,y) \wedge R(y) \wedge (\neg P(x,y') \vee \neg R(y'')))$$

$$y = f(x) \mid \forall x \forall y' \forall y'' (P(x,f(x)) \wedge R(f(x)) \wedge (\neg P(x,y') \vee \neg R(y''))))$$

$$\{P(x,f(x))\}, \{R(f(x))\}, \{\neg P(x,y'), \neg R(y'')\}$$

$y''/f(x)$

$$\{\neg P(x,y')\}$$

$y'/f(x)$

$$\square$$

$$\varphi(x,u,v) \quad (\exists y)(E(u,y) \wedge E(y,x) \wedge \neg(u=y) \wedge \neg(y=x)) \wedge (E(v,x) \wedge \neg(v=x))$$

Množim všech vrcholů: $\varphi^{T,u,v}(x,y,z) = \{a \in T \mid T \models \varphi[e(x/a, y/u, z/v)]\}$

$$\varphi(x,u,v) := \dots$$

$$\varphi^{G,u,v}(x,y,z) := \{a \in G \mid G \models \varphi[e(x/a, y/u, z/v)]\}$$

$$\{P(x),\ Q(x,y),\ Q(x,f(z))\},\ \{\neg P(u),\ \neg Q(f(u),u)\}$$

$Q(x,f(v)),\ Q(x,f(v))$ $\neg Q(f(f(v)),f(v))$

$$\{P(f(f(v))),\ Q(f(f(v)),f(v)),\ Q(f(f(v)),f(v))\},\ \{\neg P(f(v)),\ \neg Q(f(f(v)),f(v))\}$$

$$\{P(f(f(v))),\ \neg P(f(v))\}$$