Pro množiny $\{1 \dots n\}$, lze pro zadané n vytvořit posloupnost a_n,
kdy $\forall$ prvek k je jeho vzdálenost od druhého k rovna k.

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4$
1, 2, 3, 4
1, 2, 3, 4
$b_1\ b_2\ b_3\ b_4$

Pro $n=4$ lze, např.:

Musím vytvořit CNF formuli
↳ $(\dots \vee \dots) \wedge (\dots \vee \dots)$

↳ Mohl bych vzít DNF formuli
↳ $(\dots \wedge \dots) \vee (\dots \wedge \dots)$

1, 1, 4, 2, 3, 2, 4, 3

↳ Jelikož můžu vyjmenovat všechny možnosti, jak je uspořádat podle zadané podmínky a pak to převést do CNF

Mohl bych vytvořit DNF pro jednotlivé pozice (což bych pak převedl do CNF)

Pro 1: 1,1,0,0 … 0,0
$\vee$
0,1,1,0, … 0,0
$\vee$
⋮

Pro 2: 1,0,1,0, …, 0,0
$\vee$
0,1,0,1,0, … 0,0
$\vee$
⋮

Pozorování

- pro každou pozici prvního výskytu mám jednoznačnou pozici druhého výskytu

Teoreticky bych mohl mít: všechny možné uspořádání dané dvojice, kterých $a_{1_1}, a_{1_2}, a_{1_3} \dots a_{1_n}$ pro číslo 1 a pozice $1..n$

$((\dots \wedge \dots) \vee (\dots \wedge \dots) \vee \dots)$

↳ To my řeší rozložení jednotlivých proměnných

Nyní nutno zavést vzájemnou spojitost

Pro pozici a_{1_1}: $\neg(a_{2_1} \vee a_{3_1} \dots \vee a_{n_1}) \wedge \neg(a_{2_{1+k}} \vee a_{3_{1+k}} \dots \vee a_{n_{1+k}}) = A_1$

Tedy pokud ostatní dvojice neobsadili stejnou pozici

$\wedge$

A := číslo 1
index 1 := pozice

↳ Tohle bych musel kontrolovat pro každou pozici

Tohle se ale tváří jako dobrá CNF formule:

Pro každou možnou výchozí pozici každého k musím takovou formuli vytvořit

↳ Alespoň na jedné pozici musím číslo A uplatnit, tudíž

$(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{2n-k})$ musí být = True, jinak nelze takovou posloupnost vytvořit.

$2n-k$ → protože to je poslední pozice, kde můžu začít, abych mohl přidat 2. číslo.

Tedy celkem mám: $\left(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{2n-k}\right) \wedge \left(B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_{2n-k}\right) \wedge \dots$

kdy $A_i :=$ $q_{1_i} \wedge \neg\left(q_{2_i} \vee q_{3_i} \vee \dots q_{n_i}\right) \wedge q_{1_{i+k}} \wedge \neg\left(q_{2_{i+k}} \vee q_{3_{i+k}} \vee \dots q_{n_{i+k}}\right)$

$\hookrightarrow$ pozice nastavena $\hookrightarrow$ a jinde neobsazena $\hookrightarrow$ další pozice nastavena $\hookrightarrow$ a jinde neobsazena

$$= q_{1_i} \wedge \underbrace{\neg q_{2_i} \wedge \neg q_{3_i} \wedge \dots \neg q_{n_i}}_{n-1\ \neg q\ \text{literálů}} \wedge q_{1_{i+k}} \wedge \underbrace{\neg q_{2_{i+k}} \wedge \neg q_{3_{i+k}} \wedge \dots \neg q_{n_{i+k}}}_{n-1\ \neg q\ \text{literálů}}$$

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge d) = \left(a \vee (c \wedge d)\right) \wedge \left(b \vee (c \wedge d)\right) = (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)$$

Tudíž bych měl umět z $\left(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{2n-k}\right)$, kdy $\forall A$ obsahuje formuli konjunkcí udělat CNF.

Pak ale dělám $\left(A_1 \vee A_2 \dots\right) \wedge \left(B_1 \vee B_2 \dots\right)$

Tohle musím ještě ověřit

$$\left((a \wedge b) \vee (c \wedge d)\right) \wedge \left((e \wedge f) \vee (g \wedge h)\right) \approx$$

$$\approx \left((a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d)\right) \wedge \left((e \vee g) \wedge (e \vee h) \wedge (f \vee g) \wedge (f \vee h)\right)$$

což je zjednodušeně:

$$(a \wedge b) \wedge (c \wedge d) \approx a \wedge b \wedge c \wedge d$$ $\to$ Tohle je CNF

tudíž:

$$\approx (a \vee c) \wedge (a \vee d) \wedge (b \vee c) \wedge (b \wedge d) \wedge (e \vee g) \wedge (e \vee h) \wedge (f \vee g) \wedge (f \vee h)$$

$\to$ A tohle je CNF!

$$\left(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_{2n-k}\right) \wedge \left(B_1 \vee B_2 \vee \dots \vee B_{2n-k}\right) \wedge \dots$$

$\hookrightarrow$ Tedy i tuto formuli lze zapsat v CNF tvaru.

Finální tvorba CNF formule:

Nechť $1 = A,\ 2 = B \dots$

Pak $A_i := q_{1_i} \wedge q_{1_{i+k}} \wedge \neg q_{2_i} \wedge \neg q_{3_i} \dots \neg q_{n_i} \wedge \neg q_{2_{i+k}} \wedge \neg q_{3_{i+k}} \dots \neg q_{n_{i+k}}$

$\forall i : i+k \le 2n$ —> abych se vešel s celou dvojicí do posloupnosti

Celkem tedy literálů q bude $n * 2n = 2n^2$

každé číslo   můžu dát na $2n$ pozic

↳ ve skutečnosti bude pozic trochu méně

Literály budu číslovat:

$$q_{1_1},\ q_{1_2},\ q_{1_3} \dots q_{1_{2n}},\ q_{2_1},\ q_{2_2} \dots q_{n_{2n}}$$

$$1,\ 2,\ 3 \dots 2n,\ 2n+1,\ 2n+2,\ \dots,\ 2n^2$$

$(A_1 \vee A_2 \vee \dots) \wedge$

↳ je každý s každým $(.. \vee ..) \wedge \dots \wedge (\dots \vee \dots) \wedge$

„složky A"   „složky B"

Test pro $n=2$:

Tohle automaticky nejde   Tyhle automaticky nejdou

$$(A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee \cancel{A_4}) \wedge (B_1 \vee B_2 \vee \cancel{B_3 \vee B_4})$$

$$(\overset{1}{q_{1_1}} \wedge \neg \overset{2}{q_{2_1}}) \vee (\overset{3}{q_{1_2}} \wedge \neg \overset{4}{q_{2_2}}) \vee (\overset{5}{q_{1_3}} \wedge \neg \overset{6}{q_{2_3}})$$

$\sim (1 \vee 3 \vee 5) \wedge (1 \vee 3 \vee 6) \wedge (1 \vee 4 \vee 5) \wedge (1 \vee 4 \vee 6) \wedge (2 \vee 3 \vee 5) \wedge$

$\wedge (2 \vee 3 \vee 6) \wedge (2 \vee 4 \vee 5) \wedge (2 \vee 4 \vee 6)$

q_{1_1} q_{1_2} q_{1_3} q_{1_4} q_{2_1} q_{2_2} q_{2_3} q_{2_4} q_{3_1} q_{3_2} q_{3_3} q_{3_4}

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$$(q_{2_1} \wedge q_{2_3} \wedge \neg q_{1_1} \wedge \neg q_{1_3}) \vee (q_{2_2} \wedge \neg q_{1_2})$$

Implikační způsob:

$$\bar{A} = (A_2 \to (A_1 \vee A_3)) \vee (A_3 \to (A_2 \vee A_4)) \vee \ldots (A_{n-1} \to (A_{n-2} \vee A_n))$$

– takhle pro každé číslo

Celkem to bude $\bar{A} \wedge \bar{B} \wedge \ldots$

– kódování nechám stejné

$$(a \to (b \vee c)) \approx (\neg a \vee (b \vee c)) \sim (\neg a \vee b \vee c)$$

$$\bar{A} = (\neg A_2 \vee A_1 \vee A_3) \vee (\neg A_3 \vee A_2 \vee A_4) \vee \ldots$$

$$\sim \neg A_2 \vee A_1 \vee A_3 \vee \neg A_3 \vee A_2 \vee A_4 \ldots$$

$$\bar{B} = (B_3 \to (B_1 \vee B_5)) \vee (B_4 \to (B_2 \vee B_6)) \vee \ldots$$

$$\sim \neg B_3 \vee B_1 \vee B_5 \vee \neg B_4 \vee B_2 \vee B_6$$

Implikační způsob 2:

$$\bar{N} = (A_n \to (A_{n-A} \vee A_{n+A})) \vee (B_n \to (B_{n-B} \vee B_{n+B})) \ldots$$

Pokud by $n \pm x$ bylo mimo $\langle 0; 2n \rangle$, tak automaticky můžu dosadit False

Vyzoiči bude existovat validní rozložení právě

Musím celkem mít $\bar{1} \wedge \bar{2} \wedge \bar{3} \wedge \ldots \wedge \overline{2N}$

n= 1_3 , final_sequence = 6

$$\overline{1} = (\neg A_1 \lor \cancel{A_0} \lor A_2) \lor (\neg B_1 \lor \cancel{B_{-1}} \lor B_3) \lor (\neg C_1 \lor \cancel{C_{-2}} \lor C_4)$$

$$\overline{2} = (\neg A_2 \lor A_1 \lor A_3) \lor (\neg B_2 \lor \cancel{B_0} \lor B_4) \lor (\neg C_2 \lor \cancel{C_{-1}} \lor C_5)$$

$$\overline{3} = (\neg A_3 \lor A_2 \lor A_4) \lor (\neg B_3 \lor B_1 \lor B_5) \lor (\neg C_3 \lor \cancel{C_0} \lor C_6)$$

$$\overline{4} = (\neg A_4 \lor A_3 \lor A_5) \lor (\neg B_4 \lor B_2 \lor B_6) \lor (\neg C_4 \lor C_1 \lor \cancel{C_7})$$

$$\overline{5} = (\neg A_5 \lor A_4 \lor A_6) \lor (\neg B_5 \lor B_3 \lor \cancel{B_7}) \lor (\neg C_5 \lor C_2 \lor \cancel{C_8})$$

$$\overline{6} = (\neg A_6 \lor A_5 \lor \cancel{A_7}) \lor (\neg B_6 \lor B_4 \lor \cancel{B_8}) \lor (\neg C_6 \lor C_3 \lor \cancel{C_9})$$

$$(\neg A_1 \lor A_2 \lor \neg B_1 \lor B_3 \lor \neg C_1 \lor C_4) \land$$
$$(\neg A_2 \lor A_1 \lor A_3 \lor \neg B_2 \lor B_4 \lor \neg C_2 \lor C_5) \land$$

pro n=1 , final_sequence = 2

$$(\neg A_1 \lor A_2) \land (\neg A_2 \lor A_1)$$

		1	2	3	
A_1	A_2	$\neg A_1 \lor A_2$	$\neg A_2 \lor A_1$	$A_1 \lor A_2$	$1 \land 2 \land 3$
0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Tohle ale nesmí nastat, oba literály musí existovat

$$\Rightarrow + \land (A_1 \lor A_2) \land (B_1 \lor B_2)$$

n=2: final_sequence = 4

A_2, B_3 A_1, A_3, B_4 A_2, A_4, B_1

$$(\neg A_1 \lor A_2 \lor \neg B_1 \lor B_3) \land (\neg A_2 \lor A_1 \lor A_3 \lor \neg B_2 \lor B_4) \land (\neg A_3 \lor A_2 \lor A_4 \lor \neg B_3 \lor B_1)$$

$$\land (\neg A_4 \lor A_3 \lor \neg B_4 \lor B_2) \land (A_1 \lor A_2 \lor A_3 \lor A_4) \land (B_1 \lor B_2 \lor B_3 \lor B_4)$$

A_3, B_2

$(A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_3) \wedge (A_2 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_3)$

$(A_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge B_3)$

$\wedge$

$(A_2 \wedge (A_1 \vee A_3)) \vee (B_2 \wedge B_4)$

$\wedge$

$(A_3 \wedge (A_2 \vee A_4)) \vee (B_3 \wedge B_1)$

$\wedge$

$(A_4 \wedge A_3) \vee (B_4 \wedge B_2)$

Universal literal 0 -> False

$\bar{1} = A_1 \vee B_1 \vee ..$

$A_n = (A_n \wedge (A_{n-1} \vee A_{n+1}))$

$\bar{2} = A_2 \vee B_2 \vee ..$

$(A_n \wedge (A_{n-1} \vee A_{n+1})) \vee (B_n \wedge (B_{n-2} \vee B_{n+2})) \vee (C_n \wedge (C_{n-3} \vee C_{n+3}))$

DNF:

$(A_n \wedge A_{n-1}) \vee (A_n \wedge A_{n+1}) \vee (B_n \wedge B_{n-2}) \vee (B_n \wedge B_{n+2}) \vee (C_n \wedge C_{n-3}) \vee (C_n \wedge C_{n+3})$

$(a \wedge b \wedge c) \wedge (d \wedge e \wedge f)$

$(a \land b) \lor (c \land d) \lor (e \land f) \lor (g \land h)$

$(a$ AND $b)$ OR $(c$ AND $d)$ OR $(e$ AND $f)$ OR $(g$ AND $h)$

$e_1 \land e_2$

$e_1 \lor e_2$

Minimal forms

DNF	$(a \land b) \lor (c \land d) \lor (e \land f) \lor (g \land h)$
CNF	$(a \lor c \lor e \lor g) \land (a \lor c \lor e \lor h) \land (a \lor c \lor f \lor g) \land (a \lor c \lor f \lor h) \land$ $(a \lor d \lor e \lor g) \land (a \lor d \lor e \lor h) \land (a \lor d \lor f \lor g) \land (a \lor d \lor f \lor h) \land$ $(b \lor c \lor e \lor g) \land (b \lor c \lor e \lor h) \land (b \lor c \lor f \lor g) \land (b \lor c \lor f \lor h) \land$ $(b \lor d \lor e \lor g) \land (b \lor d \lor e \lor h) \land (b \lor d \lor f \lor g) \land (b \lor d \lor f \lor h)$

Kde $a = c$, $e = g$

Následně můžu pro každou pozici generovat tabulku komplet.

$n = 1$

$n = 2$