

(a) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$

(b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$

(c) $\mathcal{A} \models ((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$

(d) $\mathcal{A} \models ((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$

Sentence obsahuje pouze vázané proměnné.Dároveň platí $\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$

1) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Rightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$ ✓ Tedy:

$$\mathcal{A} \models (\forall y)(\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Rightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi)$$

Pokud rozhodně existuje výběr x, y takový, že $x=y$, tedy platí i první strana.

$$\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\exists x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\exists x)(\psi \rightarrow \varphi) \quad \checkmark$$

Existuje výběr proměnné pro literál $\neg(\psi \rightarrow \varphi)$, tedy explicitně existuje proměnná pro splnění důsledku implikace. Tedy pro jakékoli ohodnocení implikačního předpokladu bude implikace platit.

b) $\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Rightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$ ✓

$$\mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow (\forall y)\varphi) \Rightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi)$$

Implikační důsledek platí pro všechna ohodnocení proměnné z domény.

Tedy lze přímo zjednodušit na $\forall(x)(\psi \rightarrow \varphi)$, jelikož formule φ stále splácím a ohodnocení výrazu závisí jen na ohodnocení ψ předpokladu.

Tedy přímo dostáváme první stranu.

$$\mathcal{A} \models (\psi \rightarrow (\forall x)\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{A} \models (\forall x)(\psi \rightarrow \varphi) \quad \checkmark$$

Jakmile implikace je platná pro všechna ohodnocení, je její ohodnocení závislé na ohodnocení důsledku pouze v případě platného předpokladu.

V ostatních případech je platnost implikace závislá na předpokladu,

tedy celkově je pak implikace platná pro všechna ohodnocení důsledku.

Tedy implikace platí.

$$c) A \models ((\exists x) \varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow A \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \quad \checkmark$$

$$A \models (\forall y)((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow A \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

Pro pravě jeden hodnotu předpokladu je splněn implikace pro všechnu ohodnocení důsledku.

Tudíž musí být implikace platná i pro všechnu ohodnocení předpokladu, jelikož pokud bude předpoklad pravdivý, je i důsledek, tudíž celá implikace.

Jakmile není předpoklad pravdivý, je pravdivá implikace automaticky.

$$A \models ((\exists x) \varphi \rightarrow \psi) \Leftarrow A \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \quad \checkmark$$

$$A \models (\forall y)((\exists x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftarrow A \models (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

Pokud je implikace pravdivá pro všechnu ohodnocení, explicitně platí, že musí existovat ohodnocení předpokladu, které vychází z výběm prvku takového, aby $x=y$.

Tedy $(\forall y)$ mohu vybrat $(\exists x)$, aby $x=y$, tudíž byh implikace splněn vzhledem k předpokladu.

$$d) A \models ((\forall x) \varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow A \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi) \quad \checkmark$$

$$A \models (\forall y)((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow A \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

Pokud je implikace (s platným předpokladem) pravdivá, musí být pravdivý i důsledek.

To explicitně dovoluje z výběm $\forall x, y$ vybrat takové $x=y$, že bude splněn první stranu.

$$A \models ((\forall x) \varphi \rightarrow \psi) \Leftarrow A \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi) \quad \checkmark$$

$$A \models (\forall y)((\forall x)\varphi \rightarrow \psi) \Leftarrow A \models (\exists x)(\varphi \rightarrow \psi)$$

Pokud je splněn důsledek implikace, platí trivialně i levá strana.

Pokud však důsledek neplatí, tedy $F(\psi)$, pak musí být i $F(\varphi)$. Tudíž vlevo ve výběm $(\forall x)\varphi$ to vždy neplatí a tedy existují takové výběm x, φ , že implikace je automaticky splněn.