Výroková a predikátová logika - XI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2020/21

Unifikace

Nechť $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ je (konečná) množina výrazů.

- *Unifikace* pro S je substituce σ taková, že $E_1\sigma = E_2\sigma = \cdots = E_n\sigma$, tj. $S\sigma$ je singleton.
- S je *unifikovatelná*, pokud má unifikaci.
- Unifikace σ pro S je *nejobecnější unifikace (mgu)*, pokud pro každou unifikaci τ pro S existuje substituce λ taková, že $\tau = \sigma\lambda$.

Např. $S = \{P(f(x), y), P(f(a), w)\}$ *je unifikovatelná pomocí nejobecnější* unifikace $\sigma = \{x/a, y/w\}$. Unifikaci $\tau = \{x/a, y/b, w/b\}$ dostaneme jako $\sigma\lambda$ pro $\lambda = \{w/b\}$. τ není mgu, nelze z ní získat unifikaci $\varrho = \{x/a, y/c, w/c\}$.

Pozorování *Jsou-li σ, τ různé nejobecnější unifikace pro S, liší se pouze přejmenováním proměnných.*

Unifikační algoritmus

Nechť S je (konečná) neprázdná množina výrazů a p je nejlevější pozice, na které se nějaké dva výrazy z S liší. Pak *neshoda* v S je množina $D(S)$ podvýrazů začínajících na pozici p ze všech výrazů v S .

Např. pro $S = \{P(x,y), P(f(x),z), P(z,f(x))\}$ *je* $D(S) = \{x, f(x), z\}$.

Vstup Neprázdná (konečná) množina výrazů S.

Výstup Nejobecnější unifikace σ pro S nebo *"S není unifikovatelná"*.

(0) Nechť $S_0 := S$, $\sigma_0 := \emptyset$, $k := 0$. *(inicializace)*

(1) Je-li S_k singleton, vydej substituci $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_k$. *(mgu pro S)*

(2) Zjisti, zda v $D(S_k)$ existuje proměnná x a term t neobsahující x.

(3) Pokud ne, vydej *"S není unifikovatelná"*.

(4) Jinak $\sigma_{k+1} := \{x/t\}$, $S_{k+1} := S_k\sigma_{k+1}$, $k := k+1$ a jdi na (1).

Poznámka *Test výskytu proměnné x v termu t v kroku (2) může být "drahý".*

Unifikační algoritmus - příklad

$$S = \{P(f(y, g(z)), h(b)),\ P(f(h(w), g(a)), t),\ P(f(h(b), g(z)), y)\}$$

1) $S_0 = S$ není singleton a $D(S_0) = \{y, h(w), h(b)\}$ obsahuje term $h(w)$ a proměnnou y nevyskytující se v $h(w)$. Pak $\sigma_1 = \{y/h(w)\}$, $S_1 = S_0\sigma_1$, tj.

   $S_1 = \{P(f(h(w), g(z)), h(b)),\ P(f(h(w), g(a)), t),\ P(f(h(b), g(z)), h(w))\}.$

2) $D(S_1) = \{w, b\}$, $\sigma_2 = \{w/b\}$, $S_2 = S_1\sigma_2$, tj.

   $S_2 = \{P(f(h(b), g(z)), h(b)),\ P(f(h(b), g(a)), t)\}.$

3) $D(S_2) = \{z, a\}$, $\sigma_3 = \{z/a\}$, $S_3 = S_2\sigma_3$, tj.

   $S_3 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b)),\ P(f(h(b), g(a)), t)\}.$

4) $D(S_3) = \{h(b), t\}$, $\sigma_4 = \{t/h(b)\}$, $S_4 = S_3\sigma_4$, tj.

   $S_4 = \{P(f(h(b), g(a)), h(b))\}.$

5) S_4 je singleton a nejobecnější unifikace pro S je

   $\sigma = \{y/h(w)\}\{w/b\}\{z/a\}\{t/h(b)\} = \{y/h(b), w/b, z/a, t/h(b)\}.$

Unifikační algoritmus - korektnost

Tvrzení *Pro každé S unifikační algoritmus vydá po konečně mnoha krocích korektní výsledek, tj. nejobecnější unifikaci σ pro S nebo pozná, že S není unifikovatelná.* $(*)$ *Navíc, pro každou unifikaci τ pro S platí, že $\tau = \sigma\tau$.*

Důkaz V každém kroku eliminuje jednu proměnnou, někdy tedy skončí.

- Skončí-li neúspěchem po k krocích, nelze unifikovat $D(S_k)$, tedy ani S.
- Vydá-li $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_k$, je σ evidentně unifikace pro S.
- Dokážeme-li, že σ má vlastnost $(*)$, je σ nejobecnější unifikace pro S.

(1) Nechť τ je unifikace pro S. Ukážeme, že $\tau = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_i\tau$ pro každé $i \leq k$.

(2) Pro $i = 0$ platí (1). Nechť $\sigma_{i+1} = \{x/t\}$, předpokládejme $\tau = \sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_i\tau$.

(3) Stačí dokázat, že $v\sigma_{i+1}\tau = v\tau$ pro každou proměnnou v.

(4) Pro $v \neq x$ je $v\sigma_{i+1} = v$, tedy platí (3). Nyní $v = x$ a $v\sigma_{i+1} = x\sigma_{i+1} = t$.

(5) Jelikož τ unifikuje $S_i = S\sigma_0\sigma_1 \cdots \sigma_i$ a proměnná x i term t jsou v $D(S_i)$, musí τ unifikovat x a t, tj. $t\tau = x\tau$, jak bylo požadováno pro (3). □

Obecné rezoluční pravidlo

Nechť klauzule C_1, C_2 neobsahují stejnou proměnnou a jsou ve tvaru

$$C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}, \quad C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\},$$

kde $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ lze unifikovat a $n, m \geq 1$. Pak klauzule

$$C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma,$$

kde σ je nejobecnější unifikace pro S, je *rezolventa* klauzulí C_1 a C_2.

Např. v klauzulích $\{P(x), Q(x,z)\}$ *a* $\{\neg P(y), \neg Q(f(y), y)\}$ *lze unifikovat* $S = \{Q(x,z), Q(f(y),y)\}$ pomocí nejobecnější unifikace $\sigma = \{x/f(y), z/y\}$ a získat z nich rezolventu $\{P(f(y)), \neg P(y)\}$.

Poznámka *Podmínce o různých proměnných lze vyhovět přejmenováním proměnných v rámci klauzule. Je to nutné, např. z* $\{\{P(x)\}, \{\neg P(f(x))\}\}$ *lze po přejmenování získat* $\square$, *ale* $\{P(x), P(f(x))\}$ *nelze unifikovat.*

Rezoluční důkaz

Pojmy zavedeme jako ve VL, jen navíc dovolíme přejmenování proměnných.

- *Rezoluční důkaz (odvození)* klauzule C z formule S je konečná posloupnost $C_0, \ldots, C_n = C$ taková, že pro každé $i \leq n$ je $C_i = C'_i\sigma$, kde $C'_i \in S$ a σ je přejmenování proměnných, nebo je C_i rezolventou nějakých dvou předchozích klauzulí (i stejných).
- Klauzule C je (rezolucí) *dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_R C$, pokud má rezoluční důkaz z S.
- *Zamítnutí* formule S je rezoluční důkaz $\square$ z S.
- S je (rezolucí) *zamítnutelná*, pokud $S \vdash_R \square$.

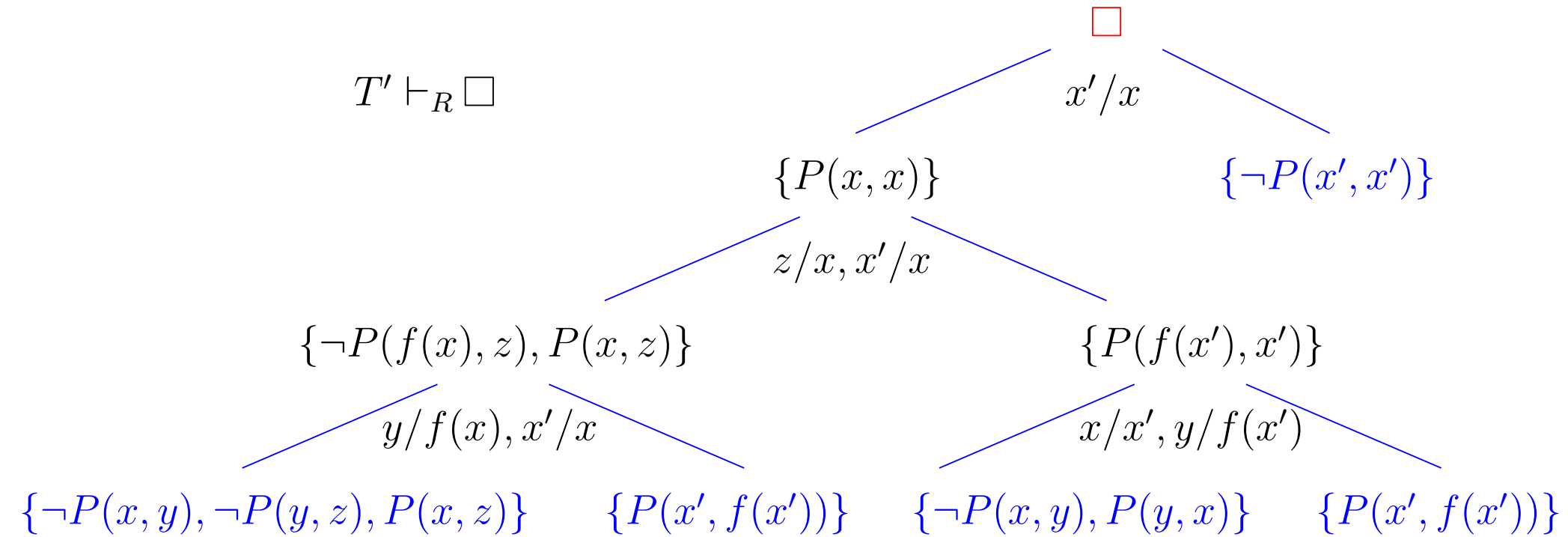
Poznámka *Eliminace více literálů najednou je někdy nezbytná, např.* $S = \{\{P(x), P(y)\}, \{\neg P(x), \neg P(y)\}\}$ *je rezolucí zamítnutelná, ale nemá zamítnutí, při kterém by se v každém kroku eliminoval pouze jeden literál.*

Příklad rezoluce

Mějme teorii $T = \{\neg P(x,x),\ P(x,y) \to P(y,x),\ P(x,y) \wedge P(y,z) \to P(x,z)\}$.

Je $T \models (\exists x)\neg P(x, f(x))$? Tedy, je následující formule T' nesplnitelná?

$T' = \{\{\neg P(x,x)\}, \{\neg P(x,y), P(y,x)\}, \{\neg P(x,y), \neg P(y,z), P(x,z)\}, \{P(x, f(x))\}\}$



Korektnost rezoluce

Nejprve ukážeme, že obecné rezoluční pravidlo je korektní.

Tvrzení Nechť C je rezolventa klauzulí C_1, C_2. Pro každou L-strukturu $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models C_1 \text{ a } \mathcal{A} \models C_2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models C.$$

Důkaz Nechť $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}$, $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$, σ je nejobecnější unifikace pro $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ a $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$.

- Jelikož C_1, C_2 jsou otevřené, platí i $\mathcal{A} \models C_1\sigma$ a $\mathcal{A} \models C_2\sigma$.
- Máme $C_1\sigma = C_1'\sigma \cup \{S\sigma\}$ a $C_2\sigma = C_2'\sigma \cup \{\neg(S\sigma)\}$.
- Ukážeme, že $\mathcal{A} \models C[e]$ pro každé e. Je-li $\mathcal{A} \models S\sigma[e]$, pak $\mathcal{A} \models C_2'\sigma[e]$ a tedy $\mathcal{A} \models C[e]$. Jinak $\mathcal{A} \not\models S\sigma[e]$, pak $\mathcal{A} \models C_1'\sigma[e]$ a tedy $\mathcal{A} \models C[e]$. □

Věta (korektnost) *Je-li formule S rezolucí zamítnutelná, je S nesplnitelná.*

Důkaz Nechť $S \vdash_R \square$. Kdyby $\mathcal{A} \models S$ pro nějakou strukturu $\mathcal{A}$, z korektnosti rezolučního pravidla by platilo i $\mathcal{A} \models \square$, což není možné. ■

Lifting lemma

Rezoluční důkaz na úrovni VL lze "zdvihnout" na úroveň PL.

Lemma *Nechť $C_1^* = C_1\tau_1$, $C_2^* = C_2\tau_2$ jsou základní instance klauzulí C_1, C_2 neobsahující stejnou proměnnou a C^* je rezolventa C_1^* a C_2^*. Pak existuje rezolventa C klauzulí C_1 a C_2 taková, že $C^* = C\tau_1\tau_2$ je základní instance C.*

Důkaz Předpokládejme, že C^* je rezolventa C_1^*, C_2^* přes literál $P(t_1, \ldots, t_k)$.

- Pak lze psát $C_1 = C_1' \sqcup \{A_1, \ldots, A_n\}$ a $C_2 = C_2' \sqcup \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}$, kde $\{A_1, \ldots, A_n\}\tau_1 = \{P(t_1, \ldots, t_k)\}$ a $\{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\}\tau_2 = \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}$.
- Tedy $(\tau_1\tau_2)$ unifikuje $S = \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ a je-li σ mgu pro S z unifikačního algoritmu, pak $C = C_1'\sigma \cup C_2'\sigma$ je rezolventa C_1 a C_2.
- Navíc $(\tau_1\tau_2) = \sigma(\tau_1\tau_2)$ z vlastnosti $(*)$ pro σ a tedy

$$\begin{aligned} C\tau_1\tau_2 &= (C_1'\sigma \cup C_2'\sigma)\tau_1\tau_2 = C_1'\sigma\tau_1\tau_2 \cup C_2'\sigma\tau_1\tau_2 = C_1'\tau_1 \cup C_2'\tau_2 \\ &= (C_1 \setminus \{A_1, \ldots, A_n\})\tau_1 \cup (C_2 \setminus \{\neg B_1, \ldots, \neg B_m\})\tau_2 \\ &= (C_1^* \setminus \{P(t_1, \ldots, t_k)\}) \cup (C_2^* \setminus \{\neg P(t_1, \ldots, t_k)\}) = C^*. \quad \square \end{aligned}$$

Úplnost

Důsledek *Nechť S' je množina všech základních instancí klauzulí formule S. Je-li $S' \vdash_R C'$ (na úrovni VL), kde C' je základní klauzule, pak existuje klauzule C a základní substituce σ t.ž. $C' = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).*

Důkaz Indukcí dle délky rezolučního odvození pomocí lifting lemmatu. □

Věta (úplnost) *Je-li formule S nesplnitelná, je $S \vdash_R \square$.*

Důkaz Je-li S nesplnitelná, dle (důsledku) Herbrandovy věty je nesplnitelná i množina S' všech základních instancí klauzulí z S.

- Dle úplnosti rezoluční metody ve VL je $S' \vdash_R \square$ (na úrovni VL).
- Dle předchozího důsledku existuje klauzule C a substituce σ taková, že $\square = C\sigma$ a $S \vdash_R C$ (na úrovni PL).
- Jediná klauzule, jejíž instance je $\square$, je klauzule $C = \square$. ■

Lineární rezoluce

Stejně jako ve VL, rezoluční metodu lze značně omezit (bez ztráty úplnosti).

- *Lineární důkaz* klauzule C z formule S je konečná posloupnost dvojic $(C_0, B_0), \ldots, (C_n, B_n)$ t.ž. C_0 je varianta klauzule v S a pro každé $i \leq n$
  - $i)$ B_i je varianta klauzule v S nebo $B_i = C_j$ pro nějaké $j < i$, a
  - $ii)$ C_{i+1} je rezolventa C_i a B_i, kde $C_{n+1} = C$.
- C je *lineárně dokazatelná* z S, psáno $S \vdash_L C$, má-li lineární důkaz z S.
- *Lineární zamítnutí* S je lineární důkaz $\square$ z S.
- S je *lineárně zamítnutelná*, pokud $S \vdash_L \square$.

Věta *S je lineárně zamítnutelná, právě když S je nesplnitelná.*

Důkaz $(\Rightarrow)$ Každý lineární důkaz lze transformovat na rezoluční důkaz. $(\Leftarrow)$ Plyne z úplnosti lineární rezoluce ve VL (nedokazováno), neboť lifting lemma zachovává linearitu odvození. $\square$

LI-rezoluce

Stejně jako ve VL, pro Hornovy formule můžeme lineární rezoluci dál omezit.

- *LI-rezoluce ("linear input")* z formule S je lineární rezoluce z S, ve které je každá boční klauzule B_i variantou klauzule ze (vstupní) formule S.
- Je-li klauzule C dokazatelná LI-rezolucí z S, píšeme $S \vdash_{LI} C$.
- *Hornova formule* je množina (i nekonečná) Hornových klauzulí.
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál.
- *Fakt* je (Hornova) klauzule $\{p\}$, kde p je pozitivní literál.
- *Pravidlo* je (Hornova) klauzule s právě jedním pozitivním a aspoň jedním negativním literálem. Pravidla a fakta jsou *programové klauzule*.
- *Cíl* je neprázdná (Hornova) klauzule bez pozitivního literálu.

Věta *Je-li Hornova T splnitelná a $T \cup \{G\}$ nesplnitelná pro cíl G, lze $\square$ odvodit LI-rezolucí z $T \cup \{G\}$ začínající G.*

Důkaz Plyne z Herbrandovy věty, stejné věty ve VL a lifting lemmatu. $\square$

Program v Prologu

Program (v Prologu) je Hornova formule obsahující pouze programové klauzule, tj. fakta nebo pravidla.

$syn(X,Y) :- otec(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg otec(Y,X), \neg muz(X)\}$
$syn(X,Y) :- matka(Y,X), muz(X).$	$\{syn(X,Y), \neg matka(Y,X), \neg muz(X)\}$
$muz(jan).$	$\{muz(jan)\}$
$otec(jiri,jan).$	$\{otec(jiri,jan)\}$
$matka(julie,jan).$	$\{matka(julie,jan)\}$
$?- syn(jan,X)$ $\quad P \models (\exists X) syn(jan,X)\ ?$	$\{\neg syn(jan,X)\}$

Zajímá nás, zda daný existenční dotaz vyplývá z daného programu.

Důsledek *Pro program P a cíl $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ v proměnných $X_1, \ldots, X_m$*

(1) $P \models (\exists X_1) \ldots (\exists X_m)(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$, *právě když*

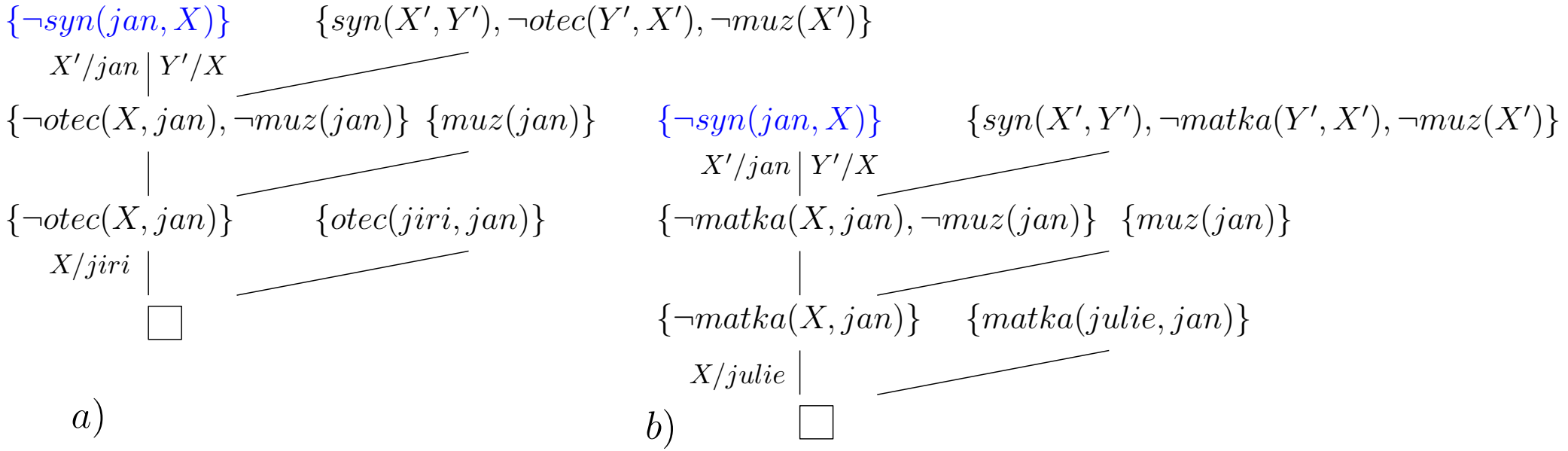
(2) $\square$ *lze odvodit LI-rezolucí z $P \cup \{G\}$ začínající (variantou) cíle G.*

LI-rezoluce nad programem

Je-li odpověď na dotaz kladná, chceme navíc znát výstupní substituci.

Výstupní substituce σ LI-rezoluce $\square$ z $P \cup \{G\}$ začínající $G = \{\neg A_1, \ldots, \neg A_n\}$ je složení mgu v jednotlivých krocích (jen na proměnné v G). Platí,

$$P \models (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)\sigma.$$



Výstupní substituce $a)\ X = jiri,\ \ b)\ X = julie$.

Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky a kvantifikátory: $\neg$, $\rightarrow$, $(\forall x)$ (ostatní odvozené)
- dokazují se libovolné formule (nejen sentence)
- *logické axiomy* (schémata logických axiomů)

$$
\begin{array}{lll}
(i) & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \\
(ii) & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) & \\
(iii) & (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) & \\
(iv) & (\forall x)\varphi \rightarrow \varphi(x/t) & \text{je-li } t \text{ substituovatelný za } x \text{ do } \varphi \\
(v) & (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall x)\psi) & \text{není-li } x \text{ volná proměnná ve } \varphi
\end{array}
$$

kde φ, ψ, χ jsou libovolné formule (daného jazyka), t je libovolný term a x je libovolná proměnná.

- je-li jazyk s rovností, mezi logické axiomy patří navíc axiomy rovnosti
- *odvozovací (deduktivní) pravidla*

$$\frac{\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi}{\psi}\ \text{(modus ponens)}, \qquad \frac{\varphi}{(\forall x)\varphi}\ \text{(generalizace)}$$

Pojem důkazu

Důkaz (*Hilbertova stylu*) formule φ z teorie T je konečná posloupnost $\varphi_0, \ldots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \leq n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacích pravidel.

Formule φ je *dokazatelná* v T, má-li důkaz z T, značíme $T \vdash_H \varphi$.

Věta *Pro každou teorii T a formuli φ, $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.*

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \to \psi$, pak $T \models \psi$, *tj. modus ponens je korektní*,
- jestliže $T \models \varphi$, pak $T \models (\forall x)\varphi$, *tj. pravidlo generalizace je korektní*,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T. □

Poznámka *Platí i úplnost, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ pro každou teorii T a formuli φ.*