

# Výroková a predikátová logika - IX

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2020/21

# Kanonický model

Z bezesporné větve  $V$  dokončeného tabla vyrobíme model, který se shoduje s  $V$ . Vyjdeme z dostupných syntaktických objektů - *konstantních termů*.

Nechť  $V$  je bezesporná větev dokončeného tabla z teorie  $T$  jazyka

$L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ . *Kanonický model* z větve  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$ , kde

(1)  $A$  je množina všech konstantních termů jazyka  $L_C$ ,

(2)  $f^A(s_1, \dots, s_n) = f(s_1, \dots, s_n)$

pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F} \cup (L_C \setminus L)$  a  $s_1, \dots, s_n \in A$ .

(3)  $R^A(s_1, \dots, s_n) \Leftrightarrow TR(s_1, \dots, s_n)$  je položka na  $V$

pro každý  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  či *rovnost* a  $s_1, \dots, s_n \in A$ .

*Poznámka* Výraz  $f(s_1, \dots, s_n)$  na pravé straně v (2) je konstantní term jazyka  $L_C$ , tedy prvek z  $A$ . Neformálně, pro zdůraznění, že jde o syntaktický objekt

$$f^A(s_1, \dots, s_n) = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

# Kanonický model - příklad

Nechť teorie  $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  je jazyka  $L = \langle R, f, d \rangle$ . Systematické tablo pro  $F \neg R(d)$  z  $T$  obsahuje jedinou větev  $V$  a ta je bezesporná.

Kanonický model  $\mathcal{A} = \langle A, R^A, f^A, d^A, c_i^A \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  z  $V$  je pro jazyk  $L_C$  a platí

$$A = \{d, f(d), f(f(d)), \dots, c_0, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, c_1, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\},$$

$$d^A = d, \quad c_i^A = c_i \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^A(d) = "f(d)", \quad f^A(f(d)) = "f(f(d))", \quad f^A(f(f(d))) = "f(f(f(d)))", \quad \dots$$

$$R^A = \{d, f(d), f(f(d)), \dots, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\}.$$

Redukt  $\mathcal{A}$  na jazyk  $L$  je  $\mathcal{A}' = \langle A, R^A, f^A, d^A \rangle$ .

# Kanonický model s rovností

Je-li jazyk  $L$  s rovností,  $T^*$  označuje rozšíření  $T$  o axiomy rovnosti pro  $L$ .

Požadujeme-li, aby rovnost byla interpretovaná jako identita, kanonický model  $\mathcal{A}$  z bezesporné větve  $V$  dokončeného tabla z  $T^*$  musíme **faktorizovat** dle  $=^A$ .

Dle definice (3), v modelu  $\mathcal{A}$  z  $V$  pro relaci  $=^A$  platí, že pro každé  $s_1, s_2 \in A$ ,

$$s_1 =^A s_2 \iff T(s_1 = s_2) \text{ je položka na } V.$$

Jelikož  $V$  je dokončená a obsahuje axiomy rovnosti, relace  $=^A$  je ekvivalence na  $A$  a navíc **kongruence** pro všechny funkce a relace v  $\mathcal{A}$ .

**Kanonický model s rovností** z větve  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A}/=^A$ .

**Pozorování** Pro každou formuli  $\varphi$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff (\mathcal{A}/=^A) \models \varphi,$$

přičemž v  $\mathcal{A}$  je  $=$  interpretovaná relací  $=^A$ , zatímco v  $\mathcal{A}/=^A$  jako identita.

**Poznámka**  $\mathcal{A}$  je (spočetně) nekonečný model, ale  $\mathcal{A}/=^A$  může být konečný.

# Kanonický model s rovností - příklad

Nechť  $T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$  je nad  $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností. Systematické tablo pro  $F \neg R(d)$  z  $T^*$  obsahuje bezespornou větev  $V$ .

V kanonickém modelu  $\mathcal{A} = \langle A, R^A, =^A, f^A, d^A, c_i^A \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  z  $V$  pro relaci  $=^A$  platí

$$s_1 =^A s_2 \iff s_1 = f(\dots(f(s_2)\dots)) \text{ nebo } s_2 = f(\dots(f(s_1)\dots)),$$

kde  $f$  je aplikováno  $2i$ -krát pro nějaké  $i \in \mathbb{N}$ .

Kanonický model s rovností z  $V$  je  $\mathcal{B} = (\mathcal{A}/=^A) = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B, c_i^B \rangle_{i \in \mathbb{N}}$

$$(A/=^A) = \{[d]_{=^A}, [f(d)]_{=^A}, [c_0]_{=^A}, [f(c_0)]_{=^A}, [c_1]_{=^A}, [f(c_1)]_{=^A}, \dots\},$$

$$d^B = [d]_{=^A}, \quad c_i^B = [c_i]_{=^A} \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^B([d]_{=^A}) = [f(d)]_{=^A}, \quad f^B([f(d)]_{=^A}) = [f(f(d))]_{=^A} = [d]_{=^A}, \quad \dots$$

$$R^B = (A/=^A).$$

Redukt  $\mathcal{B}$  na jazyk  $L$  je  $\mathcal{B}' = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B \rangle$ .

# Úplnost

**Lemma** *Kanonický model  $\mathcal{A}$  z bezesporné dok. větve  $V$  se **shoduje** s  $V$ .*

**Důkaz** Indukcí dle struktury sentence vyskytující se v položce na  $V$ .

- Pro  $\varphi$  **atomickou**, je-li  $T\varphi$  na  $V$ , je  $\mathcal{A} \models \varphi$  dle (3). Je-li  $F\varphi$  na  $V$ , není  $T\varphi$  na  $V$ , neboť  $V$  je bezesporná, a tedy  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$  dle (3).
- Je-li  $T(\varphi \wedge \psi)$  na  $V$ , je  $T\varphi$  a  $T\psi$  na  $V$ , neboť  $V$  je dokončená. Dle indukčního předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi$  a  $\mathcal{A} \models \psi$ , tedy  $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$ .
- Je-li  $F(\varphi \wedge \psi)$  na  $V$ , je  $F\varphi$  nebo  $F\psi$  na  $V$ , neboť  $V$  je dokončená. Dle indukčního předpokladu je  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$  nebo  $\mathcal{A} \models \neg\psi$ , tedy  $\mathcal{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)$ .
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech.
- Je-li  $T(\forall x)\varphi(x)$  na  $V$ , je  $T\varphi(x/t)$  na  $V$  pro každé  $t \in A$ , neboť  $V$  je dokončená. Dle indukčního předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$  pro každé  $t \in A$ , tedy  $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$ . Obdobně pro  $F(\exists x)\varphi(x)$  na  $V$ .
- Je-li  $T(\exists x)\varphi(x)$  na  $V$ , je  $T\varphi(x/c)$  na  $V$  pro nějaké  $c \in A$ , neboť  $V$  je dokončená. Dle indukčního předpokladu je  $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$ , tedy  $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$ . Obdobně pro  $F(\forall x)\varphi(x)$  na  $V$ .  $\square$

# Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve predikátové logice je **úplná**.

**Věta** Pro každou teorií  $T$  a sentenci  $\varphi$ , je-li  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , je  $\varphi$  tablo dokazatelná z  $T$ , tj.  $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ .

**Důkaz** Necht'  $\varphi$  je pravdivá v  $T$ . Ukážeme, že libovolné **dokončené** tablo (např. **systematické**)  $\tau$  z teorie  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni je **sporné**.

- Kdyby ne, v tablu  $\tau$  je nějaká bezesporná větev  $V$ .
- Dle předchozího lemmatu existuje struktura  $\mathcal{A}$  pro jazyk  $L_C$  shodující se s větví  $V$ , speciálně s položkou  $F\varphi$  v kořeni, tj.  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ .
- Necht'  $\mathcal{A}'$  je redukt struktury  $\mathcal{A}$  na původní jazyk  $L$ . Platí  $\mathcal{A}' \models \neg\varphi$ .
- Jelikož větev  $V$  je dokončená, obsahuje  $T\psi$  pro každé  $\psi \in T$ .
- Tedy  $\mathcal{A}'$  je modelem  $T$  (neboť  $\mathcal{A}'$  se shoduje s  $T\psi$  pro každé  $\psi \in T$ ).
- To je ale ve sporu s tím, že  $\varphi$  platí v každém modelu teorie  $T$ .

Tedy tablo  $\tau$  je důkazem  $\varphi$  z  $T$ .  $\square$

# Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$ . Je-li sentence  $\varphi$  dokazatelná z  $T$ , řekneme, že  $\varphi$  je **věta** (**teorém**) teorie  $T$ . Množinu vět teorie  $T$  označme

$$\text{Thm}^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie  $T$  je

- **sporná**, jestliže je v  $T$  dokazatelný  $\perp$  (spor), jinak je **bezesporná**,
- **kompletní**, jestliže není sporná a každá **sentence** je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj.  $T \vdash \varphi$  či  $T \vdash \neg\varphi$ .
- **extenze** teorie  $T'$  jazyka  $L'$ , jestliže  $L' \subseteq L$  a  $\text{Thm}^{L'}(T') \subseteq \text{Thm}^L(T)$ , o extenzi  $T$  teorie  $T'$  řekneme, že je **jednoduchá**, pokud  $L = L'$ , a **konzervativní**, pokud  $\text{Thm}^{L'}(T') = \text{Thm}^L(T) \cap \text{Fm}_{L'}$ ,
- **ekvivalentní** s teorií  $T'$ , jestliže  $T$  je extenzí  $T'$  a  $T'$  je extenzí  $T$ .



# Důsledky

*Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.*

**Důsledek** *Pro každou teorií  $T$  a sentence  $\varphi, \psi$  jazyka  $L$ ,*

- *$T \vdash \varphi$  právě když  $T \models \varphi$ ,*
- *$\text{Thm}^L(T) = \theta^L(T)$ ,*
- *$T$  je sporná, právě když je sémanticky sporná, tj. nemá model,*
- *$T$  je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má až na elementární ekvivalenci jediný model,*
- *$T, \varphi \vdash \psi$  právě když  $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$  (**Věta o dedukci**).*

**Poznámka** *Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.*

# Löwenheim-Skolemova věta a kompaktnost

**Věta** Každá bezesporná teorie  $T$  spočetného jazyka  $L$  bez rovnosti má *spočetně nekonečný model*.

**Důkaz** Necht'  $\tau$  je systematické tablo z  $T$  s  $F\perp$  v kořeni. Jelikož je dokončené a obsahuje bezespornou větev  $V$ , neboť  $\perp$  není dokazatelný z  $T$ , existuje **kanonický model**  $\mathcal{A}$  z  $V$ . Jelikož se  $\mathcal{A}$  shoduje s  $V$ , jeho redukt na jazyk  $L$  je hledaným spočetně nekonečným modelem  $T$ .  $\square$

**Poznámka** Jde o slabou verzi tzv. *Löwenheim-Skolemovy věty*. Ve spočetném jazyce s rovností je *kanonický model s rovností spočetný*.

**Věta** Teorie má model, právě když každá její *konečná část má model*.

**Důkaz** Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie  $T$  nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný  $\perp$  systematickým tablem  $\tau$ . Jelikož je  $\tau$  konečné, je  $\perp$  dokazatelný z nějaké konečné  $T' \subseteq T$ , tj.  $T'$  nemá model.  $\square$

# Nestandardní model přirozených čísel

Nechť  $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je standardní model přirozených čísel.

Označme  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  množinu všech pravdivých **sentencí** v  $\underline{\mathbb{N}}$ . Pro  $n \in \mathbb{N}$  označme  $\underline{n}$  term  $S(S(\dots(S(0)\dots)))$ , tzv. ***n-tý numerál***, kde  $S$  je aplikováno  $n$ -krát.

Uvažme následující teorii  $T$ , kde  $c$  je nový konstantní symbol.

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

**Pozorování** Každá konečná část teorie  $T$  má model.

Tedy dle věty o kompaktnosti má  $T$  model  $\mathcal{A}$ , jde o **nestandardní model přirozených čísel**. Každá sentence z  $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$  v něm platí, ale zároveň obsahuje prvek  $c^{\mathcal{A}}$  větší než každé  $n \in \mathbb{N}$  (tj. hodnota termu  $\underline{n}$  v  $\mathcal{A}$ ).

# Rozšiřování teorií

*Ukážeme, že zavádění nových pojmů má “pomocný charakter”.*

**Tvrzení** *Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$ ,  $T'$  je teorie jazyka  $L'$  a  $L \subseteq L'$ .*

- (i)  $T'$  je extenze  $T$ , právě když **redukt**  $\mathcal{A}$  každého modelu  $\mathcal{A}'$  teorie  $T'$  na jazyk  $L$  je modelem teorie  $T$ ,*
- (ii)  $T'$  je **konzervativní** extenze  $T$ , je-li  $T'$  extenze  $T$  a každý model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$  lze **expandovat** do jazyka  $L'$  na model  $\mathcal{A}'$  teorie  $T'$ .*

## Důkaz

- (i)a) Je-li  $T'$  extenze  $T$  a  $\varphi$  libovolný axiom  $T$ , pak  $T' \models \varphi$ . Tedy  $\mathcal{A}' \models \varphi$  a rovněž  $\mathcal{A} \models \varphi$ , z čehož plyne, že  $\mathcal{A}$  je modelem  $T$ .*
- (i)b) Je-li  $\mathcal{A}$  modelem  $T$  a  $T \models \varphi$ , kde  $\varphi$  je jazyka  $L$ , pak  $\mathcal{A} \models \varphi$  a rovněž  $\mathcal{A}' \models \varphi$ . Z toho plyne, že  $T' \models \varphi$  a tedy  $T'$  je extenze  $T$ .*
- (ii) Je-li  $T' \models \varphi$ , kde  $\varphi$  je nad  $L$ , a  $\mathcal{A}$  je model  $T$ , pak v nějaké jeho expanzi  $\mathcal{A}' \models \varphi$  a tedy  $\mathcal{A} \models \varphi$ . Z čehož  $T \models \varphi$ , tj.  $T'$  je konzervativní.  $\square$*

# Extenze o definovaný relační symbol

Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$ ,  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  je formule jazyka  $L$  ve volných proměnných  $x_1, \dots, x_n$  a  $L'$  je rozšíření  $L$  o nový  $n$ -ární relační symbol  $R$ .

**Extenze** teorie  $T$  o **definici**  $R$  formulí  $\psi$  je teorie  $T'$  vzniklá přidáním axiomu

$$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)$$

**Pozorování** Každý model teorie  $T$  lze **jednoznačně** expandovat na model  $T'$ .

**Důsledek**  $T'$  je **konzervativní** extenze  $T$ .

**Tvrzení** Pro každou formuli  $\varphi'$  nad  $L'$  existuje  $\varphi$  nad  $L$ , t.ž.  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .

**Důkaz** Každou podformuli  $R(t_1, \dots, t_n)$  nahradíme za  $\psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$ , kde  $\psi'$  je vhodná varianta  $\psi$  zaručující substituovatelnost všech termů.  $\square$

**Např.** symbol  $\leq$  lze zavést v jazyce aritmetiky pomocí axiomu

$$x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$$

# Extenze o definovaný funkční symbol

Nechť  $T$  je teorie jazyka  $L$  a pro formuli  $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$  jazyka  $L$  ve volných proměnných  $x_1, \dots, x_n, y$  platí

$$T \models (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y) \quad \text{(existence)}$$

$$T \models \psi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow y = z \quad \text{(jednoznačnost)}$$

Označme  $L'$  rozšíření  $L$  o nový  $n$ -ární funkční symbol  $f$ .

**Extenze** teorie  $T$  *o definici*  $f$  formulí  $\psi$  je teorie  $T'$  vzniklá přidáním axiomu

$$f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y)$$

**Poznámka** Je-li  $\psi$  tvaru  $t(x_1, \dots, x_n) = y$ , kde  $x_1, \dots, x_n$  jsou proměnné termu  $t$ , podmínky existence a jednoznačnosti platí.

**Např. binární funkční symbol** – lze zavést pomocí  $+$  a unárního – axiomem

$$x_1 - x_2 = y \leftrightarrow x_1 + (-x_2) = y$$

# Extenze o definovaný funkční symbol (pokr.)

**Pozorování** Každý model teorie  $T$  lze *jednoznačně* expandovat na model  $T'$ .

**Důsledek**  $T'$  je *konzervativní* extenze  $T$ .

**Tvrzení** Pro každou formuli  $\varphi'$  nad  $L'$  existuje  $\varphi$  nad  $L$ , t.ž.  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .

**Důkaz** Stačí uvážit  $\varphi'$  s jediným výskytem  $f$ . Má-li  $\varphi'$  více výskytů  $f$ , lze postup aplikovat induktivně (v případě vnořených výskytů jdeme od vnitřních k vnějším). Označme  $\varphi^*$  formuli vzniklou z  $\varphi'$  nahrazením termu  $f(t_1, \dots, t_n)$  za *novou* proměnnou  $z$ . Za  $\varphi$  vezmeme formuli

$$(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)),$$

kde  $\psi'$  je vhodná varianta  $\psi$  zaručující substituovatelnost všech termů.

Nechť  $\mathcal{A}$  je model  $T'$ ,  $e$  je ohodnocení,  $a = f^A(t_1, \dots, t_n)[e]$ . Díky oběma podmínkám platí  $\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e]$  právě když  $e(z) = a$ . Tedy

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi'[e]$$

pro každé ohodnocení  $e$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$  a tedy  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .  $\square$

# Extenze o definice

Teorie  $T'$  jazyka  $L'$  je **extenze** teorie  $T$  jazyka  $L$  **o definice**, pokud vznikla z  $T$  postupnou extenzí o definici relačního či funkčního symbolu.

**Důsledek** *Nechť  $T'$  je extenze teorie  $T$  o definice. Pak*

- *každý model teorie  $T$  lze jednoznačně expandovat na model  $T'$ ,*
- *$T'$  je konzervativní extenze  $T$ ,*
- *pro každou formuli  $\varphi'$  nad  $L'$  existuje  $\varphi$  nad  $L$  taková, že  $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ .*

*Např. v teorii  $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$  nad  $L = \langle +, 0, \leq \rangle$  s rovností lze zavést  $<$  a unární funkční symbol – axiomy*

$$-x = y \leftrightarrow x + y = 0$$

$$x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)$$

*Pak formule  $-x < y$  je v této extenzi o definice ekvivalentní formuli*

$$(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0).$$